Concours GMEC session 2014

Composition : Physique 2 (électricité, optique)

Durée : 4 Heures

La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé. Si au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre. Sans qu'il soit nécessaire d'aller très loin dans les détails, le cheminement conduisant aux résultats devra pouvoir être reconstitué à la lecture de la copie. Par conséquent, l'apparition brutale d'un résultat sera considérée comme un simple miracle ne donnant pas lieu à l'attribution de points.
Cette épreuve comporte 2 parties : l'électricité et l'optique. Elles seront traitées séparément. Les sous-parties A et B de l'électricité sont indépendantes.

I. ÉLECTRICITÉ

A. Électromagnétisme

Les parties 1) 2) et 3) sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un trièdre trirectangle direct OXYZ et on désigne par $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$ les vecteurs unitaires des axes. On rappelle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \quad ; \quad \mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\vec{A} = \overrightarrow{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} \quad ; \quad \Delta\vec{E} = \vec{\nabla}^2\vec{E}$$

L'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ admet comme solution générale : $f_1\left(t - \dfrac{z}{c}\right) + f_2\left(t + \dfrac{z}{c}\right)$

1). Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, en l'absence de charges et de courants.

1.1) Etablir les équations vectorielles reliant $\Delta\vec{E}$ à $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ d'une part et $\Delta\vec{B}$ à $\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$ d'autre part. Comment s'appelle ce type d'équation ?

1.2) On suppose que les champs cherchés ne dépendent que de la coordonnée spatiale z.

1.2.a). Que peut-on dire de l'onde ?

1.2.b). Ecrire les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les composantes du champ électrique.

1.2.c) Pour chaque composante, écrire la forme de la solution de cette équation. À quoi correspondent-elles ?

1.3) On considère un de ces deux termes.

1.3.a) Donner l'expression générale des coordonnées de $\vec{E}$.

1.3.b) Montrer que l'onde se propage. En déduire la vitesse de propagation. Donner l'expression de cette vitesse en fonction de ε_0 et μ_0. Comment s'appellent ε_0 et μ_0. Donner leurs unités.

1.3.c) Montrer que l'onde correspondante est transversale.

1.4) On admettra pour la suite et ce, sans démonstration, que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \overrightarrow{e_z})$ est direct.

1.4.a) On suppose que $\vec{E} = E_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_x}$. Etablir la relation permettant de déterminer $\vec{B}$.

Trouver l'expression du champ magnétique d'amplitude B_1. Préciser le rapport $\frac{E_1}{B_1}$. Commenter.

1.4.b) On suppose que $\vec{E} = E_2 \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_x}$. Déterminer l'expression du champ magnétique d'amplitude B_2. Préciser le rapport $\frac{E_2}{B_2}$. Commenter.

2) Polarisation

2.1) Décrire l'état de polarisation des O.P.P.M (Onde Plane Progressive Monochromatique) suivantes :

$$\vec{E}_1 \begin{cases} E_x = 2\cos(\omega t + kz) \\ E_y = 2\sin(\omega t + kz) \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \vec{E}_2 \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 2\cos(\omega t - kx) \\ E_z = -2\sin\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

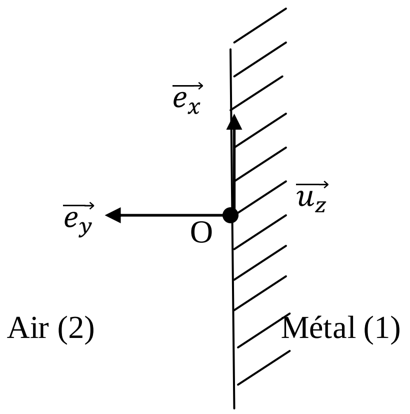
On justifiera le sens de la polarisation par deux méthodes.

2.2) Montrer que toute O.P.P.M polarisée elliptiquement peut s'écrire comme somme de deux O.P.P.M polarisée rectilignement.

2.3) Montrer que toute O.P.P.M polarisée rectilignement peut s'écrire sous la forme de deux polarisations circulaires dont on précisera le sens.

3) Réflexion d'une onde plane sur un plan parfaitement conducteur

On considère une plaque métallique conductrice, de grandes dimensions considérées comme infinies suivant OX et OZ, de conductivité γ, occupant tout le demi-espace $y < 0$ comme le montre la figure ci-dessous.



On envoie une O.P.P.M incidente de pulsation ω, de polarisation rectiligne notée $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ sur cette plaque métallique, le vecteur d'onde de l'onde incidente étant $\vec{k}_i = -k\,\vec{e_y}$ $(k > 0)$.

3.1) Qu'est-ce qu'un métal conducteur parfait ? Rappeler et démontrer les propriétés d'un conducteur parfait.

3.2) Quelle est l'expression du champ électrique $\vec{E}_i$ polarisé rectilignement suivant $\vec{e_x}$? Son amplitude sera indiquée par E_0.

3.3) Traduire le fait que le champ $\vec{E}_i$ satisfait à une équation aux dérivées partielles et en déduire la relation liant k, ω et c. Comment s'appelle cette dernière ?

3.4) Quelle est l'expression du champ magnétique incident $\vec{B}_i$. Préciser son module B_0.

En surface du métal $(y = 0)$, règnent une densité surfacique σ et un courant surfacique $\vec{j}_s$ uniformes et non permanents. On cherche une onde réfléchie, notée $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$, de vecteur d'onde $\vec{k}_r = -\vec{k}_i$ et de pulsation ω′.

3.5) On suppose à priori que le champ $\vec{E}_r$ est donné par :

$$\vec{E}_r \begin{cases} E_{rx} = E_{0rx}\cos(\omega' t - \vec{k}_r.\overrightarrow{OM} - \varphi_x) \\ E_{ry} = 0 \\ E_{rz} = E_{0rz}\cos(\omega' t - \vec{k}_r.\overrightarrow{OM} - \varphi_z) \end{cases}$$

À partir d'une relation de passage en un point quelconque de la surface du métal, déterminer E_{0rz} , ω', φ_x et E_{0rx}.

3.6) Donner alors l'expression du champ $\vec{E}_r$ en tout point du plan $y = 0^+$, puis en déduire celle de $\vec{E}_r$ et de $\vec{B}_r$ en tout point du demi-espace $y > 0$.

3.7) Que vaut le champ électromagnétique total $(\vec{E}_{tot}, \vec{B}_{tot})$. Quelle est sa particularité ? Calculer la puissance moyenne qu'elle transporte. Commenter.

3.8) Quelle propriété particulière possède le plan $y = 0$ vis à vis du champ électromagnétique total ? Quelles sont les expressions de σ et de $\vec{j}_s$.

B. *Électrocinétique*

Formulaire :

- Notation des nombres complexes : $j^2 = -1$
- Une grandeur physique $u(t)$ oscillant à la pulsation ω peut être caractérisée par son amplitude complexe $\underline{u}$ définie par :

$$u(t) = \Re\left(\underline{u}\exp j\omega t\right)$$

- On rappelle que toute fonction f, suffisamment régulière, définie sur l'intervalle $[0, T]$ peut être décomposée en une série de FOURIER de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad \text{avec} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

et les coefficients de FOURIER vérifient alors l'égalité de PARSEVAL :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt$$

- On donne la valeur approchée de la somme infinie suivante pour $a \gg b$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+(n/a)^2)(1+(b/n)^2)} \sim \frac{\pi}{2}(a-b)$$

- On donne les valeurs des intégrales suivantes $(a, b > 0)$:

$$\int_0^T x \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx = a^2 \quad \text{et} \quad \int_0^T x^2 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx = 2a^3$$

La moyenne statistique d'une grandeur G dépendant d'une variable aléatoire continue x caractérisée par une densité de probabilité $\rho(x)$ est notée $\langle G \rangle$ et on rappelle que :

$$\langle G \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, \rho(x)\, dx$$

ainsi, la moyenne et l'écart quadratique moyen de cette variable aléatoire sont donnés par :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \rho(x)\, dx \quad \text{et} \quad \langle \Delta x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \rho(x)\, dx$$

Mesure des fluctuations du courant électrique

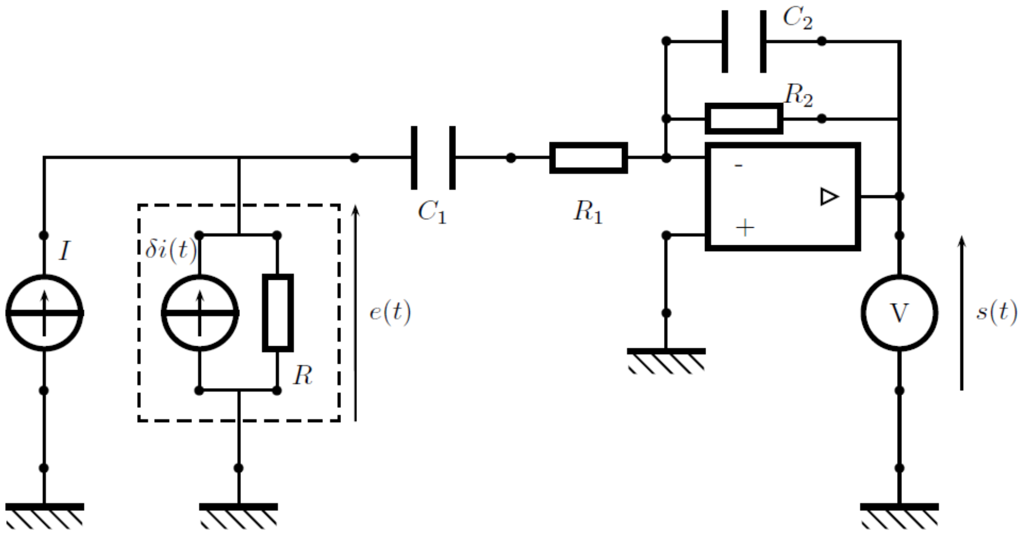
Lorsqu'on impose un courant électrique continu d'intensité I à travers un fil métallique de taille micrométrique, il apparaît, indépendamment de la source de courant utilisée, un courant électrique fluctuant $\delta i(t)$ dépendant de I et de moyenne temporelle nulle :

$$\overline{\delta i(t)} = 0$$

La moyenne temporelle étant définie par :

$$\overline{\delta i(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta i(t) dt$$

On omettra volontairement le symbole $\overline{X}$ lorsque la grandeur considérée X (courant ou tension) est constante. Expérimentalement, il est nécessaire d'amplifier les fluctuations de courant pour pouvoir les mesurer. Pour des raisons techniques, il est préférable d'imposer au fil mésoscopique un courant constant I et de mesurer les fluctuations de tension à ses bornes. On propose le montage de la figure suivante utilisé pour la mesure des fluctuations du courant $\delta i(t)$ générées par le fil mésoscopique. Le fil mésoscopique (rectangle en pointillés) peut être représenté par l'association en parallèle d'une résistance R et d'une source de courant δi. La source de courant I et l'amplificateur opérationnel sont supposés idéaux. Le voltmètre branché en sortie de l'amplificateur est en mode de fonction AC permettant de mesurer la variance $\Delta s^2 = \overline{s^2(t)} - \left(\overline{s(t)}\right)^2$ de la tension $s(t)$ appliquée à ses bornes.



Q1. Donner les hypothèses associées au caractère idéal de la source de courant et de l'amplificateur idéal.

Q2. Justifier que l'amplificateur opérationnel fonctionne, a priori, en régime linéaire. On supposera par la suite ce régime atteint.

Q3. Montrer que la fonction de transfert en notation complexe $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}$ est de la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{g}{\left(1 + \frac{\omega_{c1}}{j\omega}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{c2}}\right)}$$

où l'on exprimera g et les pulsations de coupures en fonction de R_1, R_2, C_1 et C_2. Quelle est la nature du filtre qui lui est associée ?

Q4. On suppose $\omega_{c1} \ll \omega_{c2}$. Quelle condition portant sur $|g|$, C_1 et C_2 cela implique-t-il ?

Q5. Montrer que sous l'hypothèse $\omega_{c1} \ll \omega_{c2}$, le gain maximal du filtre est $|g|$.

Q6. Tracer l'allure du diagramme de BODE représentant le gain en décibel $G_{dB} = 10 \log |\underline{H}|^2$ en fonction de $\log \omega$.

On considère maintenant les fluctuations de courant $\delta i(t)$ sur un intervalle de temps $[0, T]$ et on suppose le temps T long devant tous les temps caractéristiques du problème. $\delta i(t)$ peut alors être décomposée en une série de FOURIER de coefficients complexes $\left(\underline{i}_n\right)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\delta i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{i}_n \exp(j\omega_n t) \qquad \text{avec} \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

l'amplitude complexe $\underline{\delta i}$ s'exprime alors simplement par $\underline{\delta i}(\omega_n) = \underline{i}_n$. De manière équivalente, les tensions $e(t)$ et $s(t)$ peuvent être décomposées en série de FOURIER de coefficients $\left(\underline{e}_n\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\left(\underline{s}_n\right)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Q7. Exprimer en notation complexe $\underline{e}(\omega)$ en fonction de $\underline{I}(\omega)$, $\underline{\delta i}(\omega)$, R, R_1, C_1 et ω. $\underline{I}(\omega)$ est la représentation complexe du courant continu I.

Q8. Que vaut $\underline{I}(\omega)$ quand ω parcourt l'ensemble des $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$?

Q9. Justifier que $\underline{i}_{n=0} = 0$.

Q10. En déduire une relation entre $\underline{e}_n$, $\underline{i}_n$, R, R_1, C_1 et ω_n pour $n \neq 0$.

Q11. Comment doit-on choisir la résistance R_1 par rapport à R pour que les coefficients $\underline{e}_n$ soient indépendants du montage amplificateur ? On ordonnera simplement les résistances à l'aide du signe $\gg$ signifiant *très grand devant*. En déduire, dans ce cas, une relation simple entre $\underline{i}_n$ et $\underline{e}_n$.

Q12. Etablir l'expression des coefficients $\underline{s}_n$ en fonction de $\underline{i}_n$, $\underline{H}(\omega_n)$ et R.

Q13. Calculer la moyenne temporelle $\overline{s(t)}$ de la tension en sortie d'amplificateur et en déduire la variance Δs^2 en fonction des coefficients de FOURIER $\underline{s}_n$. On pourra utiliser le formulaire mathématique.

On suppose que les composantes spectrales des fluctuations de courant ont toutes la même amplitude, on parle alors de bruit blanc :

$$|\underline{i}_n|^2 = \frac{S_{ii}}{2T} \qquad \text{pour } n \neq 0$$

où S_{ii} est une constante appelée densité spectrale de bruit.

Q14. Déduire de ce qui précède que la variance Δs^2 des fluctuations de tension mesurées est donnée par :

$$\Delta s^2 = (gR)^2 S_{ii}\, \Delta f$$

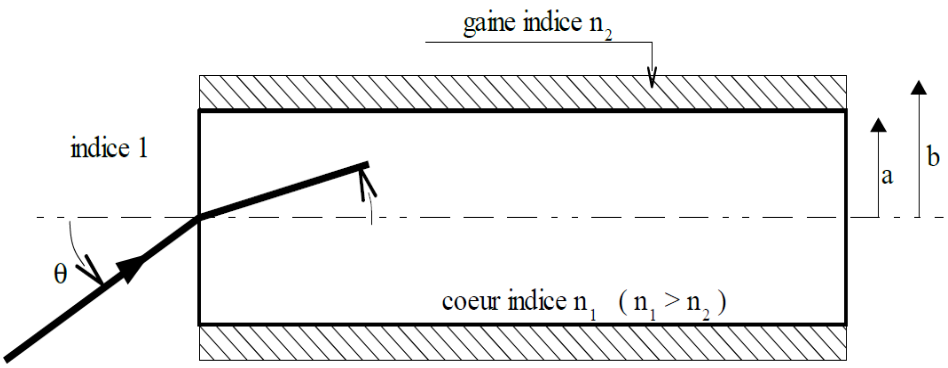
où $\Delta f = (\omega_{c2} - \omega_{c1})/4$ est une bande passante du filtre de fonction de transfert $\underline{H}$. On pourra utiliser le formulaire mathématique en justifiant les conditions de validité de la formule utilisée.

II. ***OPTIQUE***

Les parties A. B. et C. sont indépendantes.

A. **Lois de SNELL-DESCARTES**

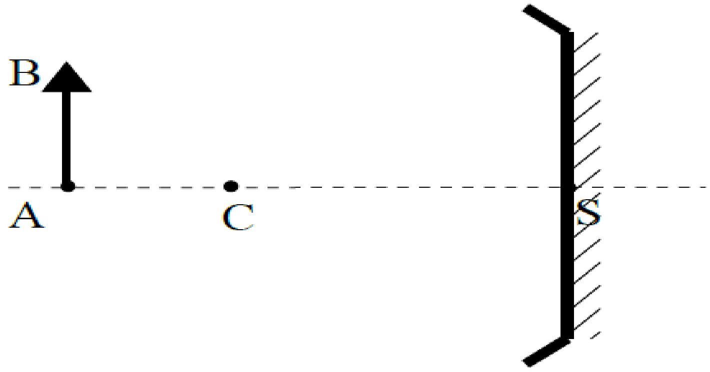
1. Énoncer les lois de SNELL-DESCARTES pour la réflexion et la réfraction.
2. Mettre en évidence l'existence d'un angle limite.
3. Application: dans le cas d'une fibre optique à saut d'indice (voir figure), quels sont les angles d'incidence θ qui conviennent?



B. **Miroir sphérique (Formules de Newton)**

L'objet *AB* est perpendiculaire à l'axe du miroir (centre *C*, sommet *S* , rayon algébrique $R = \overline{SC}$) (voir figure).

1. Construire l'image $A'B'$ en traçant les quatre rayons particuliers issus du point B.
2. En déduire les formules de Newton pour le grandissement et la relation de conjugaison.



C. <u>Lentille Mince</u> (Formules de Newton)

L'objet AB est perpendiculaire à l'axe de la lentille (centre optique O, foyer objet F, foyer image F') (voir figure).

1. Construire l'image $A'B'$ en traçant les trois rayons particuliers issus du point B.

2. En déduire les formules de Newton pour le grandissement et la relation de conjugaison.